

Сочетание традиций и инноваций в обучении математике – точка роста к достижению высоких образовательных результатов.

10.11.2022, Москва

Мардахаева Елена Львовна, канд. пед. наук, доцент, Лауреат Премии Грант Москвы в сфере образования, автор УМК «Лаборатория А.Г.Мордковича»

Общая структура курса математики



Математика в школе – учебный предмет



Математика в школе – предмет
общекультурной направленности с
гуманитарным потенциалом



Леонид Владимирович
Занков
(1901-1977)

Основные принципы развивающего обучения

1) Теория занимает приоритетное положение.



2) Быстрый темп изучения материала.



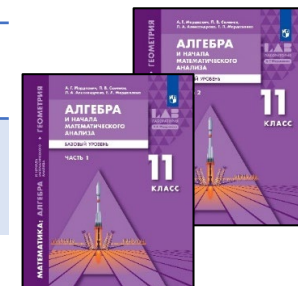
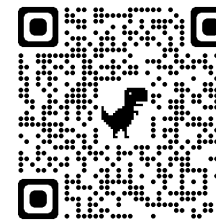
3) Прохождение материала на высоком уровне сложности.



4) Организованное проблемное обучение.



5) Развитие всех учащихся.



Математика – это язык, на котором
говорят все точные науки.

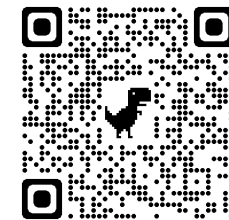
Н.И.Лобачевский

Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы



Класс	Функция	Реальные и физические процессы
7 класс	Линейная функция. Функция $y = x^2$. Кусочная функция.	Равномерные процессы.
8 класс	Квадратичная функция. Функции $y = x $, $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.	Равноускоренные процессы.
9 класс	Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.	
10 класс	Тригонометрические функции. Степенные, показательные и логарифмические функции.	Периодические процессы, гармонические колебания. Процессы органического роста.
11 класс	Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.	Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

Математика – это язык, на котором говорят все точные науки



Разноуровневые задания



Упражнения располагаются от простого к сложному, трёх уровней сложности:

- базового,**
- повышенного,**
- высокого.**

Ко всем упражнениям, кроме базового уровня, имеются ответы.

7.16. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:
а) $(-7; 8)$; в) $[-3; +\infty)$; д) $[-10; 12)$;
б) $(-10; 8]$; г) $[-3; 3]$; е) $(-\infty; 3)$.

7.17. Принадлежит ли промежутку $(-\infty; 8)$ число 7,98? Укажите два числа, которые больше числа 7,98 и принадлежат этому промежутку.

7.18. Изобразите на координатной прямой множество точек, удовлетворяющее неравенству:
а) $|x| < 4$; г) $|x| < 3$;
б) $|x| \geq 2$; д) $|x| \leq 1$;
в) $3 < |x| < 5$; е) $2 < |x| \leq 5$.

7.19. Составьте аналитическую модель числовых множеств, изображённых на рисунке 14.



Выделены задания, предназначенные для использования ИТ-средств

ИКТ 5.20. При каких значениях параметра p уравнение имеет один корень:

а) $(p - 4)x = 4$; в) $\left(p - 2\frac{4}{9}\right)x = -9\frac{5}{8}$;
б) $p(p + 3)x = -3$; г) $p(p + 9)x = -8$?

ИКТ 5.21. При каких значениях параметра p уравнение имеет бесконечное множество корней:

а) $p(p - 3)x + p = 0$;
б) $(p - 3)(p + 1)x = p^2 - 1$;
в) $2x + 3(x - 4) = p^2 - 1$;
г) $p(p + 2)x - p = 2$;
д) $(p + 2)(p - 2)x + p + 2 = p^2$;
е) $x + p + 2 - 3(2x - 2) = p^2$?

ИКТ 21.9. а) Даны линейные функции $y = 2x - 3$ и $y = -2x + p$. При каком значении параметра p значения функций в точках с абсциссой -1 равны? Сделайте чертёж.
б) Даны линейные функции $y = -3x + 5$ и $y = 2x + p$. При каком значении p значения функций в точках с абсциссой 2 равны? Сделайте чертёж.

ИКТ 41.13. Составьте:

- а) точечную диаграмму;
- б) вертикальную столбиковую диаграмму;
- в) горизонтальную столбиковую диаграмму;
- г) круговую диаграмму;
- д) полигон распределения.

Практико-ориентированные задачи



4.10. Для населения сельской местности с 1 июля по 31 декабря 2017 г. были установлены следующие цены на электроэнергию.

	Однотарифный режим	Двухтарифный режим
Цена за 1 кВт	3,18 р.	День — x р. Ночь — на 2,44 р. дешевле
Энергия, потребляемая за месяц	y кВт · ч	День — 180 кВт · ч Ночь — 70 кВт · ч
Стоимость		

При этом стоимость электроэнергии за август 2017 г. у двух соседей, один из которых использует однотарифный режим, а другой — двухтарифный режим, оказалась одинаковой.

1.21. Для населения сельской местности с 1 июля по 31 декабря 2017 г. были установлены следующие цены на электроэнергию.

	Однотарифный режим	Двухтарифный режим	Многотарифный режим
Цена за 1 кВт	3,18 р.	День — 3,69 р. Ночь — 1,25 р.	Пиковая зона — 4,13 р. Полупиковая зона — 3,18 р. Ночь — 1,25 р.
Энергия, потребляемая за месяц	250 кВт · ч	День — 180 кВт · ч Ночь — 70 кВт · ч	Пиковая зона — 100 кВт · ч Полупиковая зона — 80 кВт · ч Ночь — 70 кВт · ч
Стоимость			

По данным, приведённым в таблице, определите, какой тариф окажется для семьи более выгодным. В ответе укажите стоимость электроэнергии (в рублях) по этому тарифу.

1.19. В городе М цена 1 м³ холодной воды составляет 30,87 р., а горячей — 120,82 р. Сколько рублей надо заплатить за воду в сентябре, если израсходовано 6 м³ холодной воды и 8 м³ горячей воды?

1.20. Для населения с 1 июля 2017 г. установлены следующие цены на услуги горячего и холодного водоснабжения.

	Однотарифный режим		Двухтарифный режим	
	Холодная вода	Горячая вода	Холодная вода	Горячая вода
Цена за 1 м ³	33,03 р.	130,27 р.	День — 33,31 р. Ночь — 13,22 р.	День — 151,11 р. Ночь — 52,25 р.
Показания счётчика на начало месяца	299,319 м ³	201,471 м ³	День — 239,459 м ³ Ночь — 49,864 м ³	День — 161,176 м ³ Ночь — 40,295 м ³
Показания счётчика на конец месяца	306,829 м ³	203,771 м ³	День — 245,463 м ³ Ночь — 51,366 м ³	День — 163,016 м ³ Ночь — 40,755 м ³
Стоимость				

По данным, приведённым в таблице, определите, какой тариф окажется для семьи более выгодным. В ответе укажите стоимость воды (в рублях) по этому тарифу.



§ 35. Прогрессии и банковские расчёты

Начнём с рассмотрения следующей ситуации. Клиент пришёл в банк, чтобы открыть вклад на сумму a р. на n лет под $p\%$ годовых. Ему предложили два варианта: либо снимать проценты по вкладу в конце каждого года хранения, либо забрать вклад вместе с процентами в конце срока хранения. Как поступить клиенту, чтобы в долгосрочной перспективе выиграть?

В первом случае при $n = 1$ клиент получит $\left(a + \frac{p}{100} \cdot a\right)$ р., при $n = 2$ итоговая сумма составит $\left(a + \frac{2p}{100} \cdot a\right)$ р., при $n = 3$: $\left(a + \frac{3p}{100} \cdot a\right)$ р.

и т. д. Математическая модель ситуации — конечная арифметическая прогрессия

$$a, a + \frac{p}{100} \cdot a, a + \frac{2p}{100} \cdot a, a + \frac{3p}{100} \cdot a, \dots, a + \frac{np}{100} \cdot a.$$

Итак, при первом варианте, закрывая вклад в конце срока хранения, клиент получит $a\left(1 + \frac{np}{100}\right)$ р. — это так называемая *формула простых процентов*.

Если клиент решил прийти в банк только в конце срока хранения вклада, то при $n = 1$ получаемая сумма составит, как и в первом случае, $a + \frac{p}{100} \cdot a$, т. е. $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р.; сумма вклада увеличилась в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз. Во столько же раз она увеличится и к концу второго года хранения, и к концу третьего года хранения и т. д. Математическая модель ситуации — конечная геометрическая прогрессия

$$a, a\left(1 + \frac{p}{100}\right), a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3, \dots, a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Итак, при втором варианте, закрывая вклад в конце срока хранения, клиент получит $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ р. — это так называемая *формула сложных процентов*.

35.1. Клиент взял в банке кредит в размере 50 000 р. на 5 лет под 20% годовых. Какую сумму он должен вернуть в банк в конце срока, если условия погашения кредита таковы:

а) в конце года начисляются проценты, после чего клиент возвращает проценты банку; в конце периода клиент возвращает кредит с процентами за последний год;

б) в конце каждого года начисляются проценты; всю сумму с начисленными процентами клиент возвращает банку в конце срока кредитования?

35.2. В среду на биржевых торгах котировка акций некоторой металлургической компании повысилась, а в четверг снизилась на то же число процентов. В итоге к концу дня в четверг акции торговались на уровне 96% от утренней котировки среды. На сколько процентов цена акции повышалась в среду и понижалась в четверг?

35.10. Клиент планирует взять кредит на сумму 9 100 000 р. Условия погашения кредита таковы:

— в декабре каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с декабрём предыдущего года;

— после начисления процентов в декабре в течение января каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей требуется платить ежегодно, чтобы кредит был погашен тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

35.3. В результате трёхкратного повышения цены на некоторый товар на одно и то же число процентов цена товара стала превышать первоначальную цену на 33,1%. На сколько процентов повышалась цена на товар каждый раз?

35.4. Банк начисляет по вкладам 7% годовых. 1 января 2018 г. в этот банк была положена сумма a р. Найдите размер вклада на 1 января 2023 г., если в течение этого времени процентная ставка оставалась без изменения. С помощью калькулятора выясните, через какое наименьшее число лет сумма вклада увеличится более чем в 2 раза.

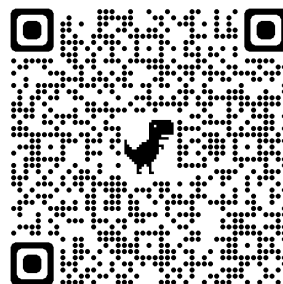
35.5. Во вторник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в среду подешевели на столько же процентов. В результате акции стали стоить на 4% меньше, чем при открытии торгов во вторник. На сколько процентов подорожали акции компании во вторник?

35.6. Цена электроплиты в магазине ежегодно уменьшалась на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена электроплиты, если выставленная на продажу за 25 000 р. электроплита через 2 года была продана за 16 810 р.

35.7. Клиент А сделал вклад в банке в размере 15 000 евро. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 1650 евро больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

35.8. В июле клиент взял в банке кредит на сумму 100 000 р. под $x\%$ годовых. Условия погашения кредита таковы, что через год после выдачи кредита начисляются проценты по кредиту, после этого выплачивается часть долга. Под какой процент был взят кредит, если он был полностью погашен за 2 года, причём в первый год было выплачено 65 000 р., а во второй 57 500 р.?

35.9. Клиент взял в банке кредит на сумму 11 млн р. под 20% годовых. Условия погашения кредита таковы, что через год после выдачи кредита начисляются проценты по кредиту, после этого в течение месяца выплачивается часть долга. Сколько миллионов рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита, если кредит был полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?





Материал для повторения включает:

1. Упражнение на закрепление сложных определений, понятий, алгоритмов.
2. Упражнение, направленное на подготовку к итоговой аттестации.
3. Упражнение на актуализацию знаний и умений для изучения последующего материала.

Упражнения для повторения

25.14. Постройте график функции $y = x^2$. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке:

- а) $[-5; -0,5]$; б) $[-1,5; 1]$; в) $(-3; 2)$; г) $[-2; +\infty)$.

25.15. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^4 \cdot a^{10}}{(a^2)^3 \cdot a^7}$; б) $\frac{y^7 \cdot y^6}{y \cdot (y^3)^4}$;
в) $\frac{(x^4)^2 \cdot x^{12}}{(x^2)^5 \cdot x^7}$; г) $\frac{b^3 \cdot (b^5)^3}{(b^4)^4 \cdot b}$.

25.16. Постройте график функции:

- а) $y = \frac{x^3}{x}$; б) $y = -\frac{x^4}{x^2}$.

§ 26. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень

Упражнения для повторения

3.22. Решите систему линейных уравнений:

- а) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x - 3y = -9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -7x + 4y = 9, \\ 3x - y = -6; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3x + y = -12, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 5y = 42, \\ 3x - y = 12. \end{cases}$

3.23. Расположите числа в порядке возрастания:

- а) $3, \sqrt{10}, 2\sqrt{3}, \frac{13}{4}$; б) $-5, -\frac{14}{3}, -2\sqrt{7}, -\sqrt{26}$;
в) $2, \frac{\sqrt{13}}{2}, \sqrt{3}, \frac{18}{11}$; г) $-4\sqrt{3}, -3\sqrt{7}, -5\sqrt{2}, -7$.

3.24. а) Дано уравнение $x^2 + 2px - 32 = 0$. При каком значении параметра p один из корней уравнения равен 4? Найдите второй корень уравнения.

б) Дано уравнение $x^2 - 5x + p = 0$. При каком значении параметра p один из корней уравнения равен 8? Найдите второй корень уравнения.

3.25. Из города A в город B , находящийся на расстоянии 240 км от A , выехал автобус со скоростью 54 км/ч. Через 40 мин вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. Прибыв в B , автомобиль тотчас повернул обратно. На каком расстоянии от A автомобиль на обратном пути встретился с автобусом?

§ 4. Основные понятия, связанные с системами двух уравнений с двумя переменными



пп	Тема	3 часа в неделю	1 час в неделю
Глава 1. Математический язык. Математические модели (17 ч)			
1	Числовые и алгебраические выражения.	3	1
2	Понятие о математическом языке.	2	
3	Свойства степеней с натуральным показателем.	3	1
4	Понятие о математических моделях.	2	1
5	Линейные уравнения с одной переменной.	3	1
6	Координатная прямая.	1	
7	Числовые промежутки на координатной прямой.	2	1
	<i>Контрольная работа № 1</i>	<i>1</i>	



Дополнительные задачи

- 1) В записи 1 2 3 4 расставьте знаки «+» или «-» между всеми числами и, если надо, перед единицей так, чтобы значение полученного числового выражения было равно: а) 8; б) 0; в) -4.
2) Докажите, что значение выражения не может быть равно 7 и не может быть равно -3.

2. В записи 2 3 4 5 6 7 расставьте знаки «+» или «-» между всеми числами и, если надо, перед первым числом так, чтобы значение полученного числового выражения было равно: а) 21; б) 17; в) 11; г) 9; д) 5; е) 1.
3. В записи 5 5 5 5 расставьте знаки арифметических действий и, если надо, скобки так, чтобы получилось числовое выражение, значение которого равно: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 9.
4. Расставьте скобки и дополнительные знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$1 : 2 \quad 1 : 6 \quad 1 : 6054 = 2018.$$

5. В выражении $7 \cdot 6 + 24 : 3 - 2$ расставьте скобки так, чтобы значение выражения было: а) наименьшим; б) наибольшим.
6. Составьте числовое выражение, значение которого равно 100, используя только указанные цифры: а) пять единиц; б) пять пятёрок; в) 1, 2, 3, 4, 5 (именно в таком порядке); г) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (именно в таком порядке).
7. В каждом ребусе одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите все решения ребусов (в пункте «д» — хотя бы одно):
а) ОДИН + ОДИН = МНОГО; г) КОКА + КОЛА = ВОДА;
б) УДАР + УДАР = ДРАКА; д) РЕ · ШЕ = НИЕ;
в) МЕТР + МЕТР = ГРАММ; е) ТРИ = ИКС.

Тема: «Числовые и алгебраические выражения»

1.10. Найдите значение выражения, предварительно составив план вычислений:

$$а) \frac{1 \frac{5}{37} \cdot \left(\frac{11}{14} + 1 \frac{1}{3} + \frac{27}{28} \right) + 1 \frac{1}{32} \cdot \left(1 \frac{3}{14} + \frac{2}{11} + \frac{9}{154} \right)}{\frac{19}{84} : \left(5 \frac{13}{42} - 2 \frac{13}{28} + \frac{5}{24} \right)}$$

$$б) \frac{\left(13 \frac{1}{4} - 2 \frac{5}{27} - 10 \frac{5}{6} \right) : 2 \frac{1}{12}}{\left(3 \frac{1}{12} + 2 \frac{7}{20} + 4 \frac{11}{30} \right) : \left(3 \frac{7}{24} + 2 \frac{3}{20} - 7 \frac{3}{40} \right)}$$



9. Решите уравнение:

а) $2^{3n} = 4^{n+7}$;

б) $2^{k+13} = 32 \cdot 8^k$;

в) $\frac{4^x \cdot 3^{2x}}{6^3} = 216$;

г) $4^x \cdot \frac{5^{2x-7}}{2^7} = 1000$;

д) $\frac{5^{2x-1}}{4^{2x}} = 7 \frac{13}{16} : 16$;

е) $\frac{2^{2m-1}}{3^{m-1}} = 4 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

61

Тема: «Свойства степеней с натуральным показателем»

10. Сколько всего натуральных решений имеет уравнение:

а) $2^n \cdot 2^k = 128$;

б) $3^n \cdot 9^k = 243$;

в) $16^n \cdot 4^k = 1024$;

г) $(5^n)^k = 25^3$;

д) $(10^n)^k = 1\,000\,000$;

е) $2^n(2^{n+1})^{k+1} = 256$?

11. Найдите наибольшее натуральное значение n , при котором число 2^n будет:

а) однозначным;

б) меньше 59;

в) двузначным;

г) меньше 500;

д) трёхзначным;

е) меньше 2025.

12. Найдите наименьшее натуральное число n , при котором $0,5^n$ будет

меньше: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{17}$; г) $\frac{3}{97}$; д) 0,01; е) 0,001.



19. Какие из утверждений «а»—«е» о натуральных числах верны, а какие — нет? (Для верных приведите обоснование, для неверных приведите пример.)
- а) Если число делится на 4, то оно делится на 2;
 - б) если число делится на 2, то оно делится на 4;
 - в) если число делится и на 2, и на 3, то оно делится на 6;
 - г) если число делится и на 2, и на 4, то оно делится на 8;
 - д) если число делится и на 6, и на 8, то оно делится на 48;
 - е) если число делится и на 3, и на 8, то оно делится на 24.
20. Какие из утверждений «а»—«е» о натуральных числах верны, а какие — нет? (Для верных приведите обоснование, для неверных приведите пример.)
- а) Если число чётно, то и его квадрат чётен;
 - б) если квадрат числа чётен, то и число чётно;
 - в) если квадрат числа кратен 4, то и число кратно 4;
 - г) если число кратно 3, то его куб кратен 9;
 - д) если куб числа кратен 9, то и квадрат числа кратен 9;
 - е) если число делится и на 3, и на 8, то оно делится на 24.
21. Натуральное число d при делении на 36 даёт в остатке 35. Чему равен остаток от деления d на: а) 2; б) 3; в) 6; г) 9; д) 12; е) 18?
22. 1) Найдите все двузначные числа, которые при делении:
- а) на 6 дают в остатке 4;
 - б) на 9 дают в остатке 4;
 - в) на 6 дают в остатке 4 или при делении на 9 дают в остатке 4;
 - г) на 6 дают в остатке 4 и при делении на 9 дают в остатке 4.
- 2) Каково арифметическое соотношение между количествами чисел из пунктов «а»—«г»?
23. В классе 27 учеников. Рост каждого или меньше 160 см, или больше 150 см. Тех, у кого рост меньше 160 см, — 24. Тех, у кого рост больше 150 см, — 12. Сколько учеников, рост которых меньше 160 см и при этом больше 150 см?
24. В каждом из трёх новогодних конкурсов участвовало по 20 учеников. Оказалось, что 17 из них участвовали только в одном конкурсе и пятеро участвовали только в двух конкурсах. Сколько учеников участвовало во всех трёх конкурсах?
25. В классе 24 ученика. Девочек больше, чем мальчиков. Все ученики расселись за круглым столом симметрично относительно его центра. Докажите, что какие-то две девочки сидят друг напротив друга.

Тема: «Понятие о математических моделях»

17. Натуральное число m при делении на 60 даёт в остатке 49. Чему равен остаток от деления:
- а) $3m$ на 2; б) $5m$ на 2; в) $5m$ на 3; г) $5m$ на 4; д) $7m$ на 5; е) $7m + 2$ на 15?
18. В классе 25 учеников. Среди любых 15 учеников есть девочка. Среди любых 12 учеников есть мальчик. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

¹ Плоттер (от англ. *plot* — наносить точки, прокладывать курс) — специальный графопостроитель.

- 4.17. Клиент положил 1 000 000 р. на два депозита поровну в два банка под $p\%$ и $q\%$ соответственно. Доход начисляется ежегодно. По условиям договора в каждом банке, если клиент не снимает все деньги и не закрывает счёт, то договор пролонгируется ещё на год автоматически.
- а) Сколько денег окажется на депозитном счёте в первом банке через год?
 - б) Сколько денег окажется на депозитном счёте во втором банке через 2 года?
 - в) Сколько денег может получить клиент через 2 года, сняв все деньги в обоих банках?
 - г) Сколько денег получит клиент в первом банке, закрыв счёт через 3 года?



8. Решите уравнение:

- а) $1 + (2 + 4x) + (8 + 16x) = 32$;
- б) $1 - (2 - 4x) - (8 - 16x) = 32$;
- в) $1 + (2 + x) + (3 + x) + \dots + (10 + x) = 91$;
- г) $1 + (1 + x) + (1 + 2x) + \dots + (1 + 10x) = 121$;
- д) $1 - (2 - (3 - (4 - \dots - (10 - x) \dots - x) - x) - x) = 10$;
- е) $1 - (2 - (3 - (4 - \dots - (10 - x) - x - \dots)) =$
 $= 2 - (3 - (4 - \dots - (10 - x) - x - \dots))$.

Тема: «Линейные уравнения с одной переменной»

- 5.7.**
- а) $3x(2x - 1) - 4x^2 = 2x(x - 2) + 12$;
 - б) $2x(3 - 2x) + 2x^2 = -2x(x + 2) - 20$;
 - в) $2x(3x - 4) = 2x(x - 2) + 2x(2x - 1) + 8$;
 - г) $12 - 2x(4x - 1) = 4x(2 - 2x)$.

ИКТ 5.23. Решите уравнение с параметром p :

- а) $(p - 6)x = 2$;
- б) $p(p + 2)x = -1$;
- в) $(p + 3,7)x = 8,5$;
- г) $p(p + 9)x = p^2$.



Составление схемы определения понятия



- сравнение;
- подведение под понятие;
- анализ объектов для выделения свойств и признаков объектов;
- синтез (в т.ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов)

Линейное уравнение с двумя переменными x и y :

1. уравнение **И**
2. имеет вид $ax + by = c$ **И**
3. x, y – переменные **И**
4. a, b, c – любые числа

Вернёмся ещё раз к уравнению, полученному в рассмотренной задаче. Среди бесконечного множества его решений имеются, например, такие: $x = 5, y = 0$; $x = 6, y = -2$. Однако, являясь решениями уравнения $2x + y = 10$, пары $(5; 0)$ и $(6; -2)$ не могут служить решениями данной задачи, ведь скорость второго пешехода не может быть равной нулю (тогда он не идёт навстречу первому пешеходу, а ждёт его в пункте B , что не соответствует условию). И уж тем более скорость пешехода не может быть отрицательной.

Определение. Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — любые числа (коэффициенты), называют **линейным уравнением с двумя переменными x и y** . Всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by = c$ в верное числовое равенство, называют **решением уравнения $ax + by = c$** .

Пример Найти четыре решения уравнения $3x + 4y = 12$.

Решение. 1) $(0; 3)$ — решение уравнения; в самом деле, подставив значения $x = 0, y = 3$ в уравнение $3x + 4y = 12$, получим $3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 12$ — верное равенство.

- назвать **имя понятия** – термин;
- выявить ближайшее **родовое понятие**;
- выявить признаки понятия – **видовые отличия**;
- сформулировать определение понятия;
- привести примеры объектов, входящих в объём понятия

Специальные задания при работе с материалом учебного предмета



Глава 1

Математический язык. Математические модели

Составление схемы определения понятия

§ 1. Числовые и алгебраические выражения

Из курса математики 5—6-х классов вам известно, что *числовым выражением* называют всякую запись, составленную из чисел и знаков арифметических действий (составленную, разумеется, со смыслом: например, $2 - 8 \cdot 1,57$ — числовое выражение, тогда как $(3 + : 27)$ — не числовое выражение, а бессмысленный набор символов). Часто вместо конкретных чисел используют буквы (преимущественно латинского алфавита), тогда получается *алгебраическое выражение*. Приведём примеры алгебраических выражений:

$$\begin{aligned} &a + b + c, \\ &49m^2 - 81t^2, \\ &\frac{x^2 - y^3 + 5y}{2x - y}, \\ &(mn - pq)(mn + pq). \end{aligned}$$

Если выражение достаточно сложное, то его упрощают, используя представленные в курсе алгебры различные свойства, законы, формулы. С некоторыми из них вы уже знакомы из курса математики 5—6-го классов, в чём вы сейчас убедитесь.

Числовое выражение:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. запись | И |
| 2. составлена из чисел | И |
| 3. знаков арифметических действий | И |
| 4. со СМЫСЛОМ | |

Алгебраическое выражение:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. запись | И |
| 2. составлена из чисел | И |
| 3. букв | |
| 4. знаков арифметических действий | И |
| 5. со СМЫСЛОМ | |

Специальные задания при работе с материалом учебного предмета

Составление предписания для решения задач определённого типа

- выделите тип задач, для которого составляется предписание – общий метод решения;
- предложите учащимся для решения набор задач, включающий в себя задачи, соответствующие всем пунктам предписания, которое составляется;
- выполните решение задач учащимися;
- обобщите решение задач, устанавливая последовательность действий, которые были выполнены;
- организовать правильное формулирование выполненных действий, выстроить последовательность соответствующих блоков предписания;
- организовать анализ предписания в целом виде.





Глава 1

Системы уравнений

§ 5. Решение систем уравнений методом подстановки

Составление предписания для решения задач определённого типа

Пример 1 Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y - 2x = 5, \\ x^2 + xy = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ 2y - x = 1. \end{cases}$$

Решение. а) Выразим y через x из первого уравнения системы:
 $y = 2x + 5$.

Подставим выражение $2x + 5$ вместо y во второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} x^2 + x(2x + 5) &= 8; \\ 3x^2 + 5x - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Один корень полученного квадратного уравнения легко угадывается: $x_1 = 1$. Второй корень найдём с помощью теоремы Виета, которую мы изучали в курсе алгебры 8-го класса: корни x_1, x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют соотношению $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Для уравнения $3x^2 + 5x - 8 = 0$ получаем: $x_1x_2 = \frac{-8}{3}$; $1 \cdot x_2 = -\frac{8}{3}$;
 $x_2 = -\frac{8}{3}$. Итак, либо $x = 1$, либо $x = -\frac{8}{3}$.

Если $x = 1$, то $y = 2x + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$; если $x = -\frac{8}{3}$, то
 $y = 2x + 5 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 5 = -\frac{1}{3}$.

Итак, система имеет два решения: $(1; 7)$, $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

1. Выразим y через x из первого уравнения системы;
2. Подставим полученное выражение вместо y во второе уравнение системы;
3. Решим второе уравнение системы;
4. Подставим найденное значение x в выражение для y .
5. Запишем ответ.

Алгоритм использования метода подстановки
при решении системы двух уравнений с двумя переменными x, y

1. Выразить y через x из одного уравнения системы.
2. Подставить полученное выражение вместо y в другое уравнение системы.
3. Решить полученное уравнение относительно x .
4. Подставить каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения поочерёдно вместо x в выражение y через x , полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пар значений $(x; y)$, которые были найдены соответственно на третьем и четвёртом шаге.

Использование приёмов формирования образовательных результатов на уроках различных типов



Средства обучения	Тип урока по деятельностной цели	Формируемый результат
Схема определения понятия	Урок «открытия» новой информации	сравнение; анализ объектов для выделения свойств и признаков объектов; синтез (в т.ч. самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов);
	Урок включения новой информации в систему имеющихся знаний	подведение под понятие; самоконтроль;
	Урок рефлексии	самоконтроль; самопроверка; выдвижение гипотез и их обоснование.
Составление предписания для решения задач определённого типа	Урок «открытия» новой информации	установление причинно-следственных связей; построение логической цепи рассуждения; доказательство; построение речевых высказываний в устной и письменной формах;
	Урок включения новой информации в систему имеющихся знаний	выбор эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
	Урок рефлексии	самоконтроль; самопроверка; поиск решения.

Приём саморегуляции для решения заданий на преобразование выражений

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи
1. Определите тип выражения.	Знаю ли я типы выражений?
2. Определите вид выражения.	Знаю ли я виды выражений?
3. Выполните покомпонентный анализ.	Знаю ли я, что такое анализ?
4. Сравните компоненты выражений.	Знаю ли я, что такое сравнение?
5. Сделайте выводы о дальнейших преобразованиях выражения.	Знаю ли я правила преобразований выражений группы?
6. Выполните эти преобразования: если задание выполнено, то перейдите к п.7; если задание не выполнено, то перейдите к п. 1.	До конца ли выполнено определённое в предыдущем пункте преобразование?
7. Соотнесите результат с ОДЗ выражения.	Знаю ли я, что такое ОДЗ выражений?
8. Сделайте проверку.	Знаю ли я, как делать проверку?
9. Запишите ответ.	Знаю ли я, как записать ответ?





38.8. Установите, является ли данное равенство тождеством, и если да, то укажите допустимые значения переменных.

$$в) \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} + x(x + 3) = (x + 2)^2;$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
1. Выполнить анализ условия.	<i>Знаю ли я, что такое анализ условия? Знаю ли я, что такое тождество, допустимые значения переменных? Как «установить, что равенство является тождеством»?</i>	<i>Дать определения: тождества, допустимых значений переменной; объяснить, что значит доказать тождество.</i>
2. Выполнить покомпонентный анализ выражений в правой и левой частях равенства.	<i>Знаю ли я, что такое покомпонентный анализ?</i>	<i>В левой части равенства сумма дроби и многочлена нестандартного вида, в правой части квадрат суммы.</i>
3. Сделать вывод о необходимых преобразованиях.	<i>Знаю ли я виды преобразований?</i>	<i>Дробь можно сократить.</i>



Приём саморегуляции для решения заданий на преобразование выражений



Возможный вариант записи в тетради:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} + x(x + 3) &= \frac{x^2 + 3x + 4x + 12}{x + 3} + x(x + 3) = \\ &= \frac{(x + 3)(x + 4)}{x + 3} + x(x + 3) = x + 4 + x(x + 3) \end{aligned}$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
4. Выполнить эти преобразования.	<i>Знаю ли я, как сократить дробь?</i>	<i>Сформулировать предписание: сокращение алгебраической дроби.</i>
5. Выполнить покомпонентный анализ.		<i>В левой части равенства сумма многочлена стандартного и нестандартного видов.</i>
6. Сделать вывод о возможных преобразованиях.	<i>Знаю ли я виды преобразований многочлена к стандартному виду?</i>	<i>Необходимо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.</i>





Возможный вариант записи в тетради:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} + x(x + 3) &= \frac{x^2 + 3x + 4x + 12}{x + 3} + x(x + 3) = \frac{(x + 3)(x + 4)}{x + 3} + x(x + 3) = \\ &= x + 4 + x(x + 3) = x + 4 + x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
7. Выполнить эти преобразования.	<i>Знаю ли я, как раскрыть скобки? Знаю ли я, как привести подобные слагаемые?</i>	<i>Сформулировать предписание: умножение одночлена на многочлен; привести подобные слагаемые.</i>
8. Выполните покомпонентный анализ.	<i>Знаю ли я, что такое анализ?</i>	<i>В левой части равенства сумма многочлена стандартного и нестандартного видов.</i>
9. На основании сравнения правой и левой частей сделать вывод о возможных преобразованиях.	<i>Знаю ли я, что такое сравнение? Знаю ли я виды преобразований?</i>	<i>Необходимо раскрыть скобки и привести многочлен к стандартному виду.</i>





Возможный вариант записи в тетради:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} + x(x + 3) &= \frac{x^2 + 3x + 4x + 12}{x + 3} + x(x + 3) = \frac{(x + 3)(x + 4)}{x + 3} + x(x + 3) = \\ &= x + 4 + x(x + 3) = x + 4 + x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
10. Выполнить эти преобразования.	<i>Знаю ли я, как раскрыть скобки?</i>	<i>Сформулировать предписание: умножение одночлена на многочлен.</i>
11. Выполните покомпонентный анализ.	<i>Знаю ли я, что такое анализ?</i>	<i>В левой части равенства сумма многочлена стандартного и нестандартного видов.</i>
12. На основании сравнения правой и левой частей сделать вывод о возможных преобразованиях.	<i>Знаю ли я формулу квадрата суммы?</i>	<i>Необходимо воспользоваться формулой квадрата суммы..</i>

Работа с обучающимися со сниженной мотивацией к изучению математики

Организация учебно-познавательной деятельности при проектировании индивидуальной образовательной траектории учащихся со сниженной мотивацией к изучению математики.



Шуркова Мария Владимировна

кандидат педагогических наук, доцент, автор дидактических материалов УМК «Лаборатория А. Г. Мордковича». Награждена Грамотой Департамента образования города Москвы, имеет Благодарность Мэра Москвы за заслуги в педагогической деятельности и плодотворную работу в сфере образования.



Репродуктивные задания (по образцу)



3.5. Используя деление столбиком, представьте в виде десятичной дроби число:

а) $\frac{2}{11}$

в) $\frac{5}{6}$

Решение.

$$\begin{array}{r} 2,0000\dots \\ -0 \\ \hline 20 \\ -11 \\ \hline 90 \\ -88 \\ \hline 20 \\ -11 \\ \hline 90 \\ -88 \\ \hline 2 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Ответ: $\frac{2}{11} = 0,18$.



Ответ: _____

3.6. Представьте в виде обыкновенной дроби данное число.
а) 0,(35)

Решение.
Пусть $x = 0,(35) = 0,353535\dots$. Тогда $100x = 35,353535\dots$

$$\begin{array}{r} 100x = 35,353535\dots \\ -x = 0,353535\dots \\ \hline 99x = 35 \end{array}$$

$$x = \frac{35}{99}$$

Ответ: $0,(35) = \frac{35}{99}$.

б) $0,(21) =$ _____



в) $3,(7) =$ _____



3.4. Решите неравенство, покажите множество его решений на числовой прямой. Ответ запишите в виде числового промежутка.

а) $2x > 4,5 - x$

г) $x \leq 4x + 6$

Решение.

$$2x > 4,5 - x$$

$$2x + x > 4,5$$

$$3x > 4,5 \quad | :3$$

$$x > 1,5$$

Ответ: $(1,5; +\infty)$.

б) $7x < 10 + 2x$

Решение.

Ответ: _____

Решение.

Ответ: _____

Решение.

$$5x - 1 < 3x + 7$$

Ответ: _____

г) $0,2(18)$

Решение.
Пусть $x = 0,2(18) = 0,2181818\dots$. Тогда $1000x = 218,181818\dots$

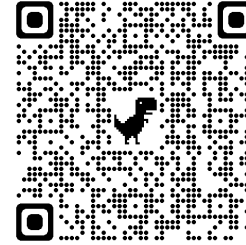
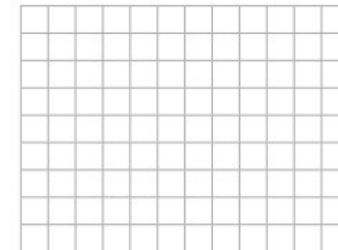
$$\begin{array}{r} 1000x = 218,181818\dots \\ -10x = 2,181818\dots \\ \hline 990x = 216 \end{array}$$

$$x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$$

д) $0,5(36) =$ _____



е) $1,2(3) =$ _____





Итак, в главе 4

Пополнили наш словарный запас математического языка следующими терминами:

- парабола, ось (ось симметрии) параболы, ветви параболы, вершина параболы;
- кубическая парабола;
- непрерывная функция, разрыв функции;
- кусочная функция;
- область определения функции;
- чтение графика.

Познакомились с новыми функциями и научились строить их графики: $y = x^2$, $y = -x^2$.

Познакомились с новым символом математического языка $y = f(x)$.

Разработали алгоритм графического решения уравнения вида $f(x) = g(x)$.

Познакомились с тем, как строить графики кусочных функций.

Вопросы

1. Как называют график функции $y = x^2$, $y = -x^2$?
2. Что является осью симметрии графика функции $y = x^2$, $y = -x^2$?
3. Какую точку называют вершиной параболы $y = x^2$, $y = -x^2$?
4. Как расположены относительно друг друга графики функций $y = x^2$, $y = -x^2$?
5. Перечислите свойства функций $y = x^2$, $y = -x^2$.
6. Сформулируйте алгоритм графического решения уравнения.

Тест

1. Укажите точки, принадлежащие графику функции $y = -x^2$.
а) $(-2; 4)$ в) $(4; -16)$
б) $(-2,5; -6,25)$ г) $(0,1; -0,1)$

Каждая глава заканчивается рубриками:

- «Итак, в Главе ...»;
- «Вопросы»;
- «Тест».

2. Для функции $y = x^2$ установите соответствие между значениями x и y , если:

- | | | |
|--------------|-------------------|-----------------------|
| А. $x = 0,2$ | Б. $x = -1,5$ | В. $x = 1\frac{1}{5}$ |
| 1) 1,44 | 2) $\frac{1}{25}$ | 3) $2\frac{1}{4}$ |

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2$ на отрезке $[-3; \frac{1}{2}]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2$ на луче $[-3,4; +\infty)$.

5. На рисунке 115 изображены парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 6$. Укажите верную запись корней уравнения $x^2 = x + 6$.
а) $(-2; 4)$ и $(3; 9)$ в) 4 и 9
б) -2 и 3 г) $(4; -2)$ и $(9; 3)$

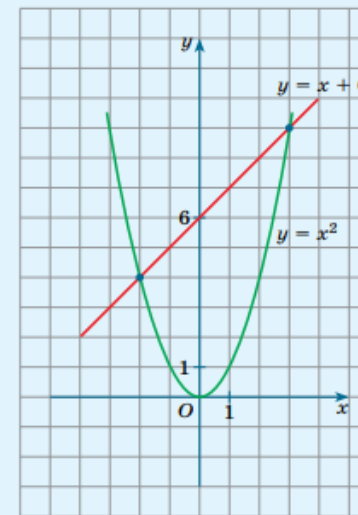


Рис. 115



Отличительные особенности УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»

Курс построен на основе приоритетности функционально-графической линии, математическое моделирование является идейным стержнем.

Теория и практика соединены в одну книгу.

Порядок тем соответствует ПРП 2021, отражает психологические особенности обучающихся.

Выстроена вероятностно-стохастическая линия в тесной взаимосвязи с основным содержанием.

Каждая глава содержит разделы «Повторение», «Итак, в Главе...», «Вопросы», «Дополнительные задачи», «Из истории математики».

Трёхуровневая система заданий отражает требования обновлённого ФГОС ООО 2021, итоговой аттестации. Добавлены задачи практического содержания, высокого уровня сложности.

Включён материал, рекомендованный к изучению с использованием ИТ-средств в соответствии с обновлённым ФГОС ООО 2021.



Мы готовы к диалогу

Адрес обратной связи:

kaf.matematika@gmail.com



Методическое сопровождение учителей математики
через авторский сайт <https://elenamard.jimdofree.com>

В СОЮЗЕ С МАТЕМАТИКОЙ
Преподавание математики в
основной и средней школе.
<https://t.me/souzmatematikov>

